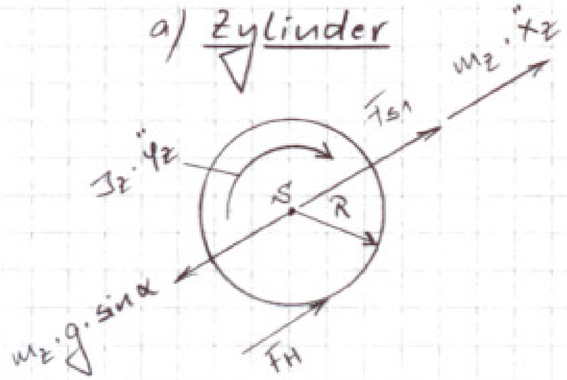
zu 1)

a) Zylinder



$\underline{\sum F_H = 0}$

$$F_{S1} - m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha + m_Z \cdot \ddot{x}_Z + F_H = 0$$

$$F_{S1} = m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - m_Z \cdot \ddot{x}_Z - F_H \quad (1)$$

$\underline{\sum M_{iS} = 0}$

$$F_H \cdot R - J_Z \cdot \ddot{\varphi}_Z = 0$$

$$F_H = \frac{J_Z \cdot \ddot{\varphi}_Z}{R} \quad (2)$$

Kinematik

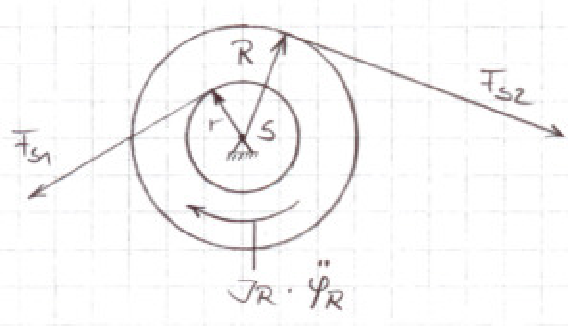
$$\ddot{\varphi}_Z = \frac{\ddot{x}_Z}{R} \quad (3)$$

(3) in (2):
$$F_H = \frac{J_Z \cdot \ddot{x}_Z}{R^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_Z \cdot R^2 \cdot \ddot{x}_Z}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot m_Z \cdot \ddot{x}_Z \quad (4)$$

(4) in (1):
$$F_{S1} = m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - m_Z \cdot \ddot{x}_Z - \frac{1}{2} \cdot m_Z \cdot \ddot{x}_Z$$

$$F_{S1} = m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{3}{2} \cdot m_Z \cdot \ddot{x}_Z \quad (5)$$

b) Rolle



$\underline{\sum M_{iS} = 0}$

$$F_{S1} \cdot r - F_{S2} \cdot R - J_R \cdot \ddot{\varphi}_R = 0$$

$$F_{S1} = F_{S2} \cdot \frac{R}{r} + \frac{J_R \cdot \ddot{\varphi}_R}{r} \quad (6)$$

Kinematik:

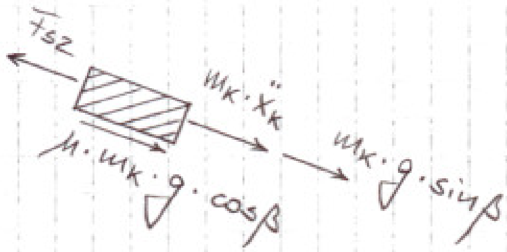
$$\ddot{\varphi}_R = \frac{\ddot{x}_Z}{r} \quad (7)$$

(7) in (6):

$$F_{S1} = F_{S2} \cdot \frac{R}{r} + \frac{\frac{1}{2} \cdot m_R \cdot R^2 \cdot \ddot{x}_Z}{r^2}$$

$$F_{S1} = 2 \cdot F_{S2} + 2 \cdot m_R \cdot \ddot{x}_Z \quad (8)$$

c) Klotz



$\sum F_{it} = 0$

$$F_{S2} = m_K \cdot \ddot{x}_K + m_K \cdot g \cdot \sin\beta + \mu \cdot m_K \cdot g \cdot \cos\beta \quad (9)$$

Kinematik

$$\ddot{x}_K = \ddot{\varphi}_R \cdot R = \ddot{x}_Z \cdot \frac{R}{r} = 2 \cdot \ddot{x}_Z \quad (10)$$

(10) in (9): $F_{S2} = 2 \cdot m_K \cdot \ddot{x}_Z + m_K \cdot g \cdot \sin\beta + \mu \cdot m_K \cdot g \cdot \cos\beta \quad (11)$

(5) = (8): $m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{3}{2} \cdot m_Z \cdot \ddot{x}_Z = 2 \cdot F_{S2} + 2 \cdot m_R \cdot \ddot{x}_Z$

(11) einsetzen

$$m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{3}{2} \cdot m_Z \cdot \ddot{x}_Z = 4 \cdot m_K \cdot \ddot{x}_Z + 2 \cdot m_K \cdot g \cdot \sin\beta + 2 \cdot \mu \cdot m_K \cdot g \cdot \cos\beta + 2 \cdot m_R \cdot \ddot{x}_Z$$

$$\ddot{x}_Z \cdot \left(4 \cdot m_K + \frac{3}{2} \cdot m_Z + 2 \cdot m_R\right) = m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - 2 \cdot m_K \cdot g \cdot \sin\beta - 2 \cdot \mu \cdot m_K \cdot g \cdot \cos\beta$$

$$\ddot{x}_Z = \frac{m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - 2 \cdot m_K \cdot g \cdot \sin\beta - 2 \cdot \mu \cdot m_K \cdot g \cdot \cos\beta}{4 \cdot m_K + \frac{3}{2} \cdot m_Z + 2 \cdot m_R}$$

$$\ddot{x}_Z = \frac{200\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \sin 30° - 2 \cdot 30\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot (\sin 20° + 0{,}2 \cdot \cos 20°)}{4 \cdot 30\,kg + \frac{3}{2} \cdot 200\,kg + 2 \cdot 40\,kg}$$

$$\ddot{x}_Z = 1{,}34\,\frac{m}{s^2}$$

$$\ddot{x}_K = 2 \cdot \ddot{x}_Z = 2{,}68\,\frac{m}{s^2}$$

zu 2) $F_{S1} = m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{3}{2} \cdot m_Z \cdot \ddot{x}_Z$

$F_{S1} = 200\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5 - \frac{3}{2} \cdot 200\,kg \cdot 1{,}34\,\frac{m}{s^2}$

$F_{S1} = 579\,N$

$$F_{SZ} = m_K \cdot (\ddot{x}_K + g \cdot \sin\beta + \mu \cdot g \cdot \cos\beta)$$

$$F_{SZ} = 30\,kg \cdot \left(2{,}68\,\frac{m}{s^2} + 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \sin 20° + 0{,}2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \cos 20°\right)$$

$$F_{SZ} = 236{,}4\,N$$

zu 3) $F_H = \frac{1}{2} \cdot m_Z \cdot \ddot{x}_Z$

$$F_H = \frac{1}{2} \cdot 200\,kg \cdot 1{,}34\,\frac{m}{s^2} = 134\,N$$

zu 4) Grenzfall $\ddot{x}_Z = 0$:

$$\Rightarrow m_Z \cdot g \cdot \sin\alpha - 2 \cdot m_K \cdot g \cdot \sin\beta - 2 \cdot \mu \cdot m_K \cdot g \cdot \cos\beta = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot m_K \cdot \sin\beta + 2 \cdot \mu \cdot m_K \cdot \cos\beta}{m_Z}$$

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot 30\,kg \cdot (\sin 20° + 0{,}2 \cdot \cos 20°)}{200\,kg}$$

$$\sin\alpha = 0{,}1590$$

$$\alpha = 9{,}15°$$

α muss größer als $9{,}15°$ sein.

A2, S13

1) $F(t)$ ist eine ungerade Funktion $\Rightarrow$ $a_k = 0$ ✓

<u>Fourierkoeffizienten b_k</u> -

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} F(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(- \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot t\right) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \frac{4}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (-\hat{F}) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot d$$

$$b_k = - \frac{16 \cdot \hat{F}}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt - \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = - \frac{16 \cdot \hat{F}}{T^2} \cdot \left[\frac{\sin(k \cdot \omega \cdot t)}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{t \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t)}{k \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{4}}$$

$$+ \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \left[\frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}$$

$$b_k = - \frac{16 \cdot \hat{F}}{T^2} \cdot \left[\frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{\frac{T}{4} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)}{k \cdot \omega} \right]$$

$$+ \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \left[\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) \right]$$

$$b_k = - \frac{16 \cdot \hat{F}}{T^2} \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{\frac{T}{4} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k \cdot \omega} \right]$$

$$+ \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \left[\cos(k \cdot \pi) - \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) \right]$$

$$b_k = - \frac{16 \cdot \hat{F}}{T^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k^2 \cdot \omega^2} + \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \cancel{\frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}$$

$$+ \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos(k \cdot \pi) - \cancel{\frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}$$

$$b_k = -\frac{16 \cdot \hat{F}}{T^2} \cdot \frac{1}{\frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right)}{k^2} + \frac{4 \cdot \hat{F}}{T} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

$$b_k = -\frac{4 \cdot \hat{F}}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) + \frac{2 \cdot \hat{F}}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

2) $\hat{F} = 2\,kN$

$$b_1 = -\frac{4 \cdot 2\,kN}{1^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2 \cdot 2\,kN}{1 \cdot \pi} \cdot \cos(\pi) = -0{,}811 - 1{,}273$$

$$b_1 = -2{,}084\,kN$$

$$b_2 = \cancelto{0}{-\frac{4 \cdot 2\,kN}{2^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin(\pi)} + \frac{2 \cdot 2\,kN}{2 \cdot \pi} \cdot \cos(2\pi) = 0{,}637\,kN$$

$$b_3 = -\frac{4 \cdot 2\,kN}{3^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{2 \cdot 2\,kN}{3 \cdot \pi} \cdot \cos(3\pi) = 0{,}090 - 0{,}424$$

$$b_3 = -0{,}334\,kN$$

$$b_4 = \cancelto{0}{-\frac{4 \cdot 2\,kN}{4^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin(2\pi)} + \frac{2 \cdot 2\,kN}{4 \cdot \pi} \cdot \cos(4\pi) = 0{,}318\,kN$$

$$b_5 = -\frac{4 \cdot 2\,kN}{5^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{2 \cdot 2\,kN}{5 \cdot \pi} \cdot \cos(5\pi) = -0{,}032 - 0{,}255$$

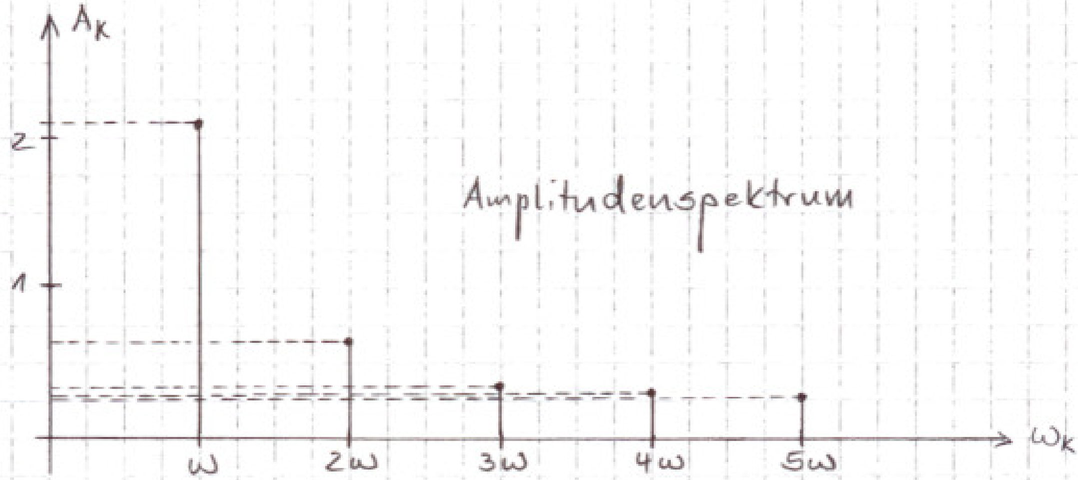
$$b_5 = -0{,}287\,kN$$

3) $$F(t) = -2{,}084\,kN \cdot \sin(\omega \cdot t) + 0{,}637\,kN \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) - 0{,}334\,kN \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + 0{,}318\,kN \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t) - 0{,}287\,kN \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t) + \ldots$$

4) <u>Amplitudenspektrum</u>

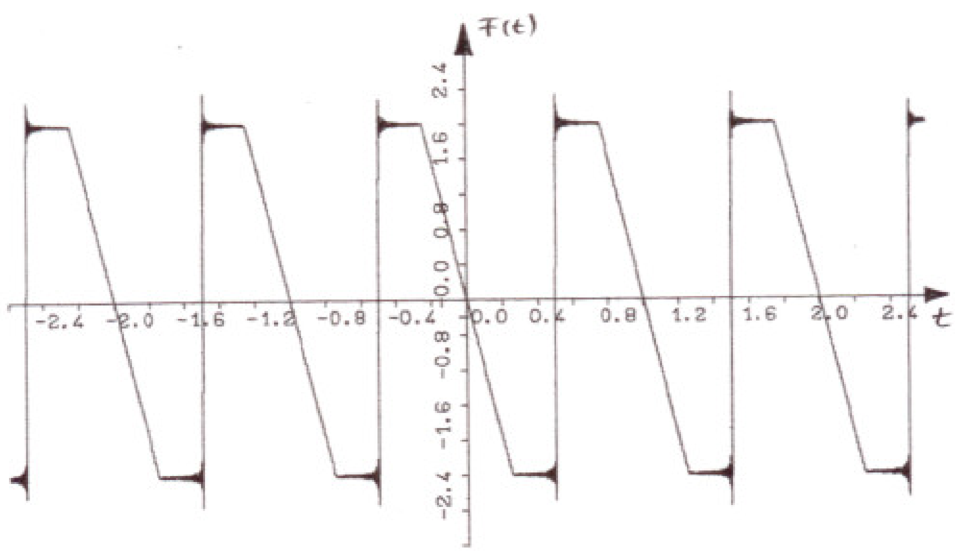
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{mit } a_k = 0$$

$$A_k = \sqrt{b_k^2} = |b_k|$$



Auswertung der Fourierreihe:

$\hat{F} = 2\,kN$; $T = 1s$; 100 Harmonische



zu 1)

$$c = \frac{1}{\frac{1}{l^2} \cdot \left(\frac{a^2}{c_B} + \cancel{\frac{b^2}{c_A}}^{\,0} \right) + \frac{a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I_y \cdot l}}$$

$$c = \frac{1}{\frac{1}{l^2} \cdot \frac{l^2}{4 \cdot c_B} + \frac{l^2 \cdot l^2}{48 \cdot E \cdot I_y \cdot l}}$$

$$c = \frac{1}{\frac{1}{4 \cdot c_B} + \frac{l^3}{48 \cdot E \cdot I_y}}$$

$$c = \frac{1}{\frac{1}{4 \cdot 150 \frac{N}{mm}} + \frac{(4000\,mm)^3}{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2} \cdot 281 \cdot 10^4\,mm^4}}$$

$$c = \frac{1}{0{,}001\bar{6}\,\frac{mm}{N} + 0{,}0026\,\frac{mm}{N}}$$

$$c = 254{,}668\,\frac{N}{mm} = 254\,668\,\frac{N}{m}$$

zu 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{254668\,\frac{N}{m}}{100\,kg}} = 50{,}46\,\frac{1}{s}$

zu 3) $\delta = D \cdot \omega_0 = 0{,}04 \cdot 50{,}46\,\frac{1}{s} = 2{,}018\,\frac{1}{s}$

$$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} = 50{,}46\,\frac{1}{s} \cdot \sqrt{1 - 0{,}04^2} = 50{,}42\,\frac{1}{s}$$

$$\frac{F_0}{c} = \frac{1000\,N}{254{,}668\,\frac{N}{mm}} = 3{,}927\,mm$$

$$\frac{D}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{0{,}04}{\sqrt{1-0{,}04^2}} = 0{,}04$$

$$w(t) = \frac{F_0}{c} - \frac{F_0}{c} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[\cos(\omega_d \cdot t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right]$$

$$W(t) = 3{,}927\,mm - 3{,}927\,mm \cdot e^{-2{,}018\frac{1}{s}\cdot t} \cdot \Big[\cos(50{,}42\tfrac{1}{s}\cdot t) + 0{,}04 \cdot \sin(50{,}42\tfrac{1}{s}\cdot t)\Big]$$

$$\dot{W}(t) = -\frac{F_0}{c}\cdot(-\delta)\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\Big[\cos(\omega_d\cdot t) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\Big] + \frac{F_0}{c}\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\omega_d\cdot\Big[\sin(\omega_d\cdot t) - \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}\cdot\cos(\omega_d\cdot t)\Big]$$

zu 4)

$$W(t=0{,}1s) = 3{,}927\,mm - 3{,}927\cdot e^{-0{,}2018}\cdot\Big[\cos(5{,}042) + 0{,}04\cdot\sin(5{,}042)\Big]$$

$$W(t=0{,}1s) = 3{,}927\,mm - 0{,}917\,mm = 3{,}01\,mm$$

$$\dot{W}(t=0{,}1s) = 3{,}927\,mm\cdot 2{,}018\tfrac{1}{s}\cdot e^{-0{,}2018}\cdot\Big[\cos(5{,}042)+0{,}04\cdot\sin(5{,}042)\Big] + 3{,}927\,mm\cdot e^{-0{,}2018}\cdot 50{,}42\tfrac{1}{s}\cdot\Big[\sin(5{,}042) - 0{,}04\cdot\cos(5{,}042)\Big]$$

$$\dot{W}(t=0{,}1s) = 1{,}851\,\frac{mm}{s} - 155{,}201\,\frac{mm}{s}$$

$$\dot{W}(t=0{,}1s) = -153{,}35\,\frac{mm}{s}$$

für $t > t_s$: $\bar{t} = t - t_s$

$$W(\bar{t}) = e^{-\delta\cdot\bar{t}}\cdot\Big[C_1\cdot\cos(\omega_d\cdot\bar{t}) + C_2\cdot\sin(\omega_d\cdot\bar{t})\Big]$$

$$C_1 = W(t=0{,}1s) = 3{,}01\,mm$$

$$C_2 = \frac{\dot{W}(t=0{,}1s) + \delta\cdot W(t=0{,}1s)}{\omega_d}$$

$$C_2 = \frac{-153{,}35\,\frac{mm}{s} + 2{,}018\,\frac{1}{s}\cdot 3{,}01\,mm}{50{,}42\,\frac{1}{s}} = -2{,}92\,mm$$

$$W(\bar{t}) = e^{-2{,}018\cdot\bar{t}}\cdot\Big[3{,}01\,mm\cdot\cos(50{,}42\tfrac{1}{s}\cdot\bar{t}) - 2{,}92\,mm\cdot\sin(50{,}42\tfrac{1}{s}\cdot\bar{t})\Big]$$