

1) Lage 1 Ausgangslage

$$E_{K1} = 0; E_{PL1} = 0; E_{PF1} = 0$$

Lage 2 Kugel nach 2m Wegstrecke

$$E_{K2} = \frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \omega_2^2$$

$$E_{PL2} = - m_K \cdot g \cdot s_K$$

$$E_{PF2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2$$

Kinematik

$$\omega_2 = \frac{v_K}{R} = \frac{\dot{s}_K}{R}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 \cdot r}{R} = \frac{v_K}{R^2} \cdot r$$

$$f = \varphi_1 \cdot R = \frac{s_K}{R^2} \cdot r \cdot R = s_K \cdot \frac{r}{R}$$

Energiesatz:  $E_2 = E_1$ 

$$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \omega_2^2 - m_K \cdot g \cdot s_K + \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_{R1} \cdot R^2 \cdot \frac{v_K^2}{R^4} \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_{R2} \cdot R^2 \cdot \frac{v_K^2}{R^2}$$

$$- m_K \cdot g \cdot s_K + \frac{1}{2} \cdot c \cdot s_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} = 0$$

$$v_K^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot m_K + \frac{1}{4} \cdot m_{R1} \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2} \right) = m_K \cdot g \cdot s_K - \frac{1}{2} \cdot c \cdot s_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

$$v_K = \dot{s}_K = \sqrt{\frac{m_K \cdot g \cdot s_K - \frac{1}{2} \cdot c \cdot s_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^2}}{\frac{1}{2} \cdot m_K + \frac{1}{4} \cdot m_{R1} \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2}}}$$

$$v_K = \dot{s}_K = \sqrt{\frac{25 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 800 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}^2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot 25 \text{ kg} + \frac{1}{4} \cdot 20 \text{ kg} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 30 \text{ kg}}}$$

$$v_K = \dot{s}_K = 2,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2)

Lage 3: Kugel im Umkehrpunkt

$$E_{K3} = 0; E_{P3} = -m_K \cdot g \cdot s_{\max}; E_{PF3} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot s_{\max}^2 \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

Energiesatz

$$E_3 = E_1$$

$$-m_K \cdot g \cdot s_{\max} + \frac{1}{2} \cdot c \cdot s_{\max}^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} = 0$$

$$s_{\max} = \frac{2 \cdot m_K \cdot g \cdot R^2}{c \cdot r^2} = \frac{2 \cdot 25 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4}{800 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

$$s_{\max} = 2,45 \text{ m}$$

3)

aus Aufgabenteil 1:

$$\dot{s}_K(s_K) = v_K(s_K) = \sqrt{\frac{m_K \cdot g \cdot s_K - \frac{1}{2} \cdot c \cdot s_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^2}}{\frac{1}{2} \cdot m_K + \frac{1}{4} \cdot m_{R1} \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2}}}$$

$$\dot{s}_K(s_K) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot m_K + \frac{1}{16} \cdot m_{R1} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2}}} \cdot \sqrt{m_K \cdot g \cdot s_K - \frac{1}{8} \cdot c \cdot s_K^2}$$

$$\frac{d\dot{s}_K}{ds_K} = \frac{dv_K}{ds_K} = \frac{1}{\sqrt{21,25 \text{ kg}}} \cdot \frac{m_K \cdot g - \frac{1}{4} \cdot c \cdot s_K}{\sqrt{m_K \cdot g \cdot s_K - \frac{1}{8} \cdot c \cdot s_K^2}} = 0$$

$$m_K \cdot g - \frac{1}{4} \cdot c \cdot s_K = 0$$

$$s_K = \frac{4 \cdot m_K \cdot g}{c} = \frac{1}{2} \cdot s_{\max} = 1,225 \text{ m}$$

$$\dot{s}_K(s_K = 1,225 \text{ m}) = \sqrt{\frac{25 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,225 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 800 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (1,225 \text{ m})^2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot 25 \text{ kg} + \frac{1}{16} \cdot 20 \text{ kg} + \frac{1}{4} \cdot 30 \text{ kg}}}$$

$$\dot{s}_K(s_K = 1,225 \text{ m}) = 2,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

zu 1/  $y(t)$  ist eine ungerade Funktion  $\Rightarrow a_0 = 0; a_k = 0$

Fourierkoeffizienten  $b_k$

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left( -\frac{4 \cdot h}{T} \cdot t \right) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = -\frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = -\frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \left[ \frac{\sin(k \cdot \omega \cdot t)}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{t \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t)}{k \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{4}}$$

$$b_k = -\frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \left[ \frac{\sin(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4})}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{\frac{T}{4} \cdot \cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4})}{k \cdot \omega} \right]$$

$$b_k = -\frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \left[ \frac{\sin(\frac{k \cdot \pi}{2})}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} - \frac{T \cdot \cos(\frac{k \cdot \pi}{2})}{4 \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right]$$

$$b_k = -\frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \left[ \frac{T^2}{4} \cdot \frac{\sin(\frac{k \cdot \pi}{2})}{k^2 \cdot \pi^2} - \frac{T^2}{8} \cdot \frac{\cos(\frac{k \cdot \pi}{2})}{k \cdot \pi} \right]$$

$$b_k = -\frac{4 \cdot h}{k \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{\sin(\frac{k \cdot \pi}{2})}{k \cdot \pi} - \frac{\cos(\frac{k \cdot \pi}{2})}{2} \right]$$

$$b_1 = -\frac{4 \cdot h}{1 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{1}{1 \cdot \pi} - 0 \right] = -\frac{4 \cdot h}{\pi^2} = -0,405 \cdot h$$

$$b_2 = -\frac{4 \cdot h}{2 \cdot \pi} \cdot \left[ 0 + \frac{1}{2} \right] = -\frac{h}{\pi} = -0,318 \cdot h$$

$$b_3 = -\frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{-1}{3 \cdot \pi} - 0 \right] = \frac{4 \cdot h}{9\pi^2} = 0,045 \cdot h$$

$$b_4 = - \frac{4 \cdot h}{4 \cdot \pi} \cdot \left[ 0 - \frac{1}{2} \right] = \frac{h}{2\pi} = 0,159 \cdot h$$

$$b_5 = - \frac{4 \cdot h}{5 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{1}{5 \cdot \pi} - 0 \right] = - \frac{4 \cdot h}{25 \cdot \pi^2} = - 0,016 \cdot h$$

$$b_6 = - \frac{4 \cdot h}{6 \cdot \pi} \cdot \left[ 0 + \frac{1}{2} \right] = - \frac{h}{3\pi} = - 0,106 \cdot h$$

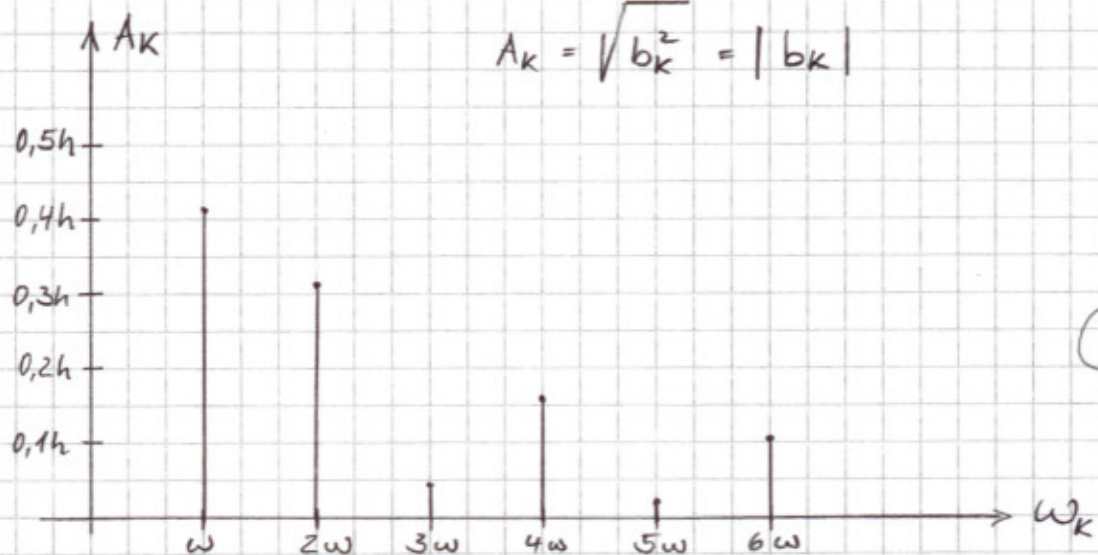
zu 2)

$$y(t) = - 0,405 \cdot h \cdot \sin(\omega \cdot t) - 0,318 \cdot h \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + 0,045 \cdot h \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + 0,159 \cdot h \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t) - \dots$$

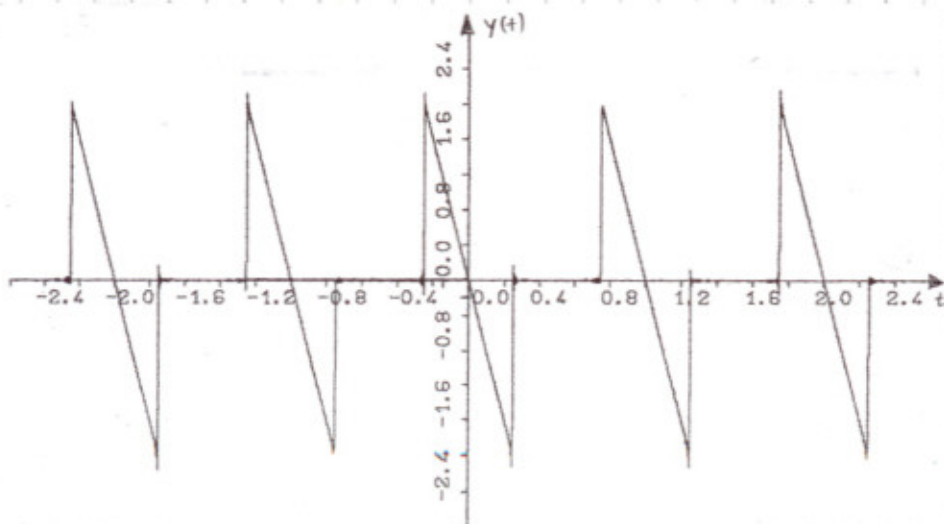
(1)

zu 3/

$$A_k = \sqrt{b_k^2} = |b_k|$$



(2)

Auswertung der Fourierreihe (nicht gefragt)

$$h = 2 \text{ cm}$$

$$T = 1 \text{ s}$$

$n = 200$  Harmonische

zu 1)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} = \sqrt{\frac{400000 \frac{N}{m}}{400 \text{ kg}}} = 31,62 \text{ s}^{-1}$$

zu 2)

$$\eta = \frac{70 \text{ s}^{-1}}{31,62 \text{ s}^{-1}} = 2,21$$

$$\hat{x} = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}} \cdot \hat{u}$$

$$\hat{x} = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot 0,1^2 \cdot 2,21^2}}{\sqrt{(1 - 2,21^2)^2 + 4 \cdot 0,1^2 \cdot 2,21^2}} \cdot 1,0 \text{ mm}$$

$$\hat{x} = 0,28 \text{ mm}$$

$$\varphi = -\psi = -\arctan \frac{2 \cdot D \cdot \eta^3}{1 - \eta^2 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}$$

$$\psi = \arctan \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 2,21^3}{1 - 2,21^2 + 4 \cdot 0,1^2 \cdot 2,21^2}$$

$$\psi = 2,612$$

$$x(t) = 0,28 \text{ mm} \cdot \sin(70 \text{ s}^{-1} \cdot t - 2,612)$$

zu 3)

$$\frac{\hat{x}}{\hat{u}} = \frac{0,25 \text{ mm}}{1,0 \text{ mm}} = 0,25 \cdot \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot 0,1^2 \cdot \eta^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4 \cdot 0,1^2 \cdot \eta^2}}$$

$$0,25 \cdot \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4 \cdot 0,1^2 \cdot \eta^2} = \sqrt{1 + 4 \cdot 0,1^2 \cdot \eta^2}$$

$$0,0625 \cdot [(1 - \eta^2)^2 + 0,04 \cdot \eta^2] = 1 + 0,04 \cdot \eta^2$$

$$0,0625 \cdot (1 - \eta^2)^2 + 0,0025 \cdot \eta^2 = 1 + 0,04 \cdot \eta^2$$

$$0,0625 - 0,125 \cdot \eta^2 + 0,0625 \cdot \eta^4 + 0,0025 \cdot \eta^2 = 1 + 0,04 \cdot \eta^2$$

$$0,0625 \cdot \eta^4 - 0,1625 \cdot \eta^2 - 0,9375 = 0$$

$$\eta^4 - 2,60 \cdot \eta^2 - 15 = 0$$

$$\xi^2 - 2,60 \cdot \xi - 15 = 0$$

$$\xi_{1/2} = 1,3 \pm \sqrt{1,69 + 15}$$

$$\xi_1 = 1,3 + 4,09 = 5,39$$

$$\eta_1 = \sqrt{5,39} = 2,32$$

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 2,32$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} = \frac{\Omega}{2,32} = \frac{70 \text{ s}^{-1}}{2,32} = 30,17 \text{ s}^{-1}$$

$$m = \frac{c_{ges}}{(30,17 \text{ s}^{-1})^2} = \frac{400\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{(30,17 \text{ s}^{-1})^2} = 439,5 \text{ kg}$$

$$\Delta m = 439,5 \text{ kg} - 400 \text{ kg} = 39,5 \text{ kg}$$