

Aufgabe 1

$y(t)$ ist eine ungerade Funktion $a_0 = a_k = 0$ (1)

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4 \cdot h}{T} \cdot t + h \right) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \frac{4}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} 2 \cdot h \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \frac{8 \cdot h}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \left[\frac{\sin(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4})}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{\frac{T}{4} \cdot \cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4})}{k \cdot \omega} \right] - \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \left[\cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}) - 1 \right] - \frac{8 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \left[\cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}) - \cos(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}) \right]$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \frac{\pi}{2})}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos(k \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$- \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) + \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega}$$

$$- \frac{8 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos(k \cdot \pi) + \frac{8 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos(k \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \frac{T^2}{4 \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} - \frac{8 \cdot h}{T} \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

$$b_k = \frac{4 \cdot h}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2 \cdot h}{k \cdot \pi} - \frac{4 \cdot h}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

$$b_k = \frac{4 \cdot h}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4 \cdot h}{k \cdot \pi} \cdot \left[(-1)^k - \frac{1}{2}\right] \quad (6)$$

$$b_1 = \frac{4 \cdot h}{\pi^2} \cdot 1 + \frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot h}{\pi^2} + \frac{6 \cdot h}{\pi} = 2,315 \cdot h$$

$$b_2 = \frac{4 \cdot h}{2 \cdot \pi^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{h}{\pi} = -0,3183 \cdot h$$

$$b_3 = \frac{4 \cdot h}{3^2 \cdot \pi^2} \cdot (-1) + \frac{4 \cdot h}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{3}{2} = 0,5916 \cdot h$$

(2)

$$b_4 = \frac{4 \cdot h}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{h}{2\pi} = -0,1592 \cdot h$$

$$b_5 = \frac{4 \cdot h}{25 \cdot \pi^2} \cdot 1 + \frac{4 \cdot h}{5 \cdot \pi} \cdot \frac{3}{2} = 0,3982 \cdot h$$

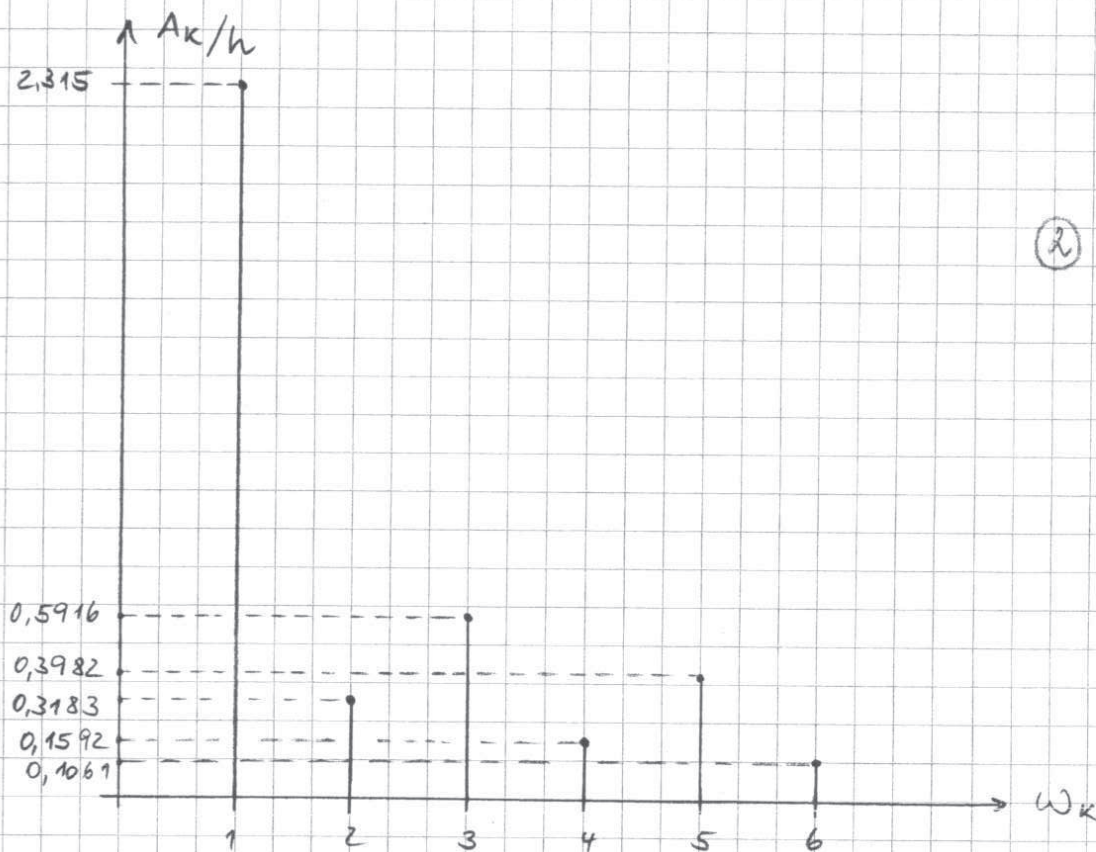
$$b_6 = \frac{4 \cdot h}{6 \cdot \pi^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -0,1061 \cdot h$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y(t) &= 2,315 \cdot h \cdot \sin(\omega \cdot t) - 0,3183 \cdot h \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \\ &+ 0,5916 \cdot h \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) - 0,1592 \cdot h \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t) \\ &+ 0,3982 \cdot h \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t) - 0,1061 \cdot h \cdot \sin(6 \cdot \omega \cdot t) + \dots \end{aligned}$$

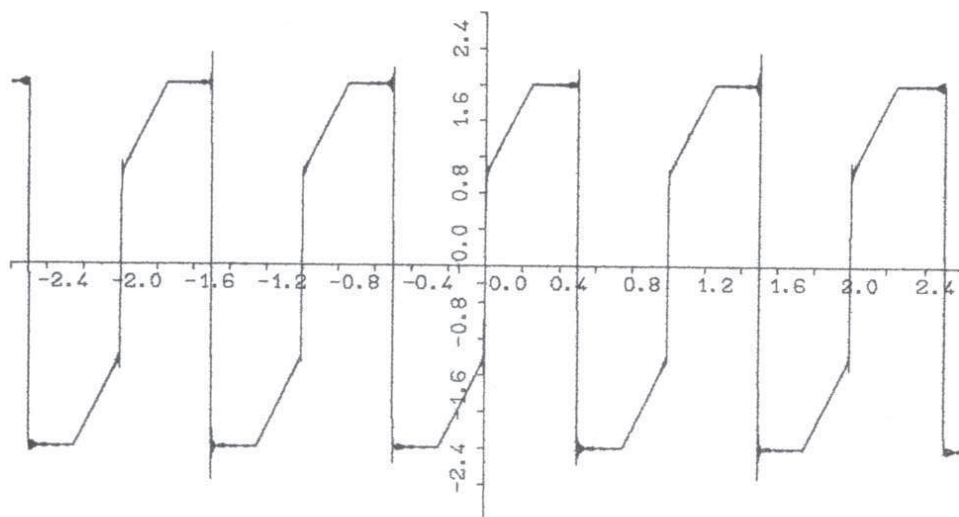
(1)

$$3/ \quad A_1 = 2,315 \cdot h ; \quad A_2 = 0,3183 \cdot h ; \quad A_3 = 0,5916 \cdot h$$

$$A_4 = 0,1592 \cdot h ; \quad A_5 = 0,3982 \cdot h ; \quad A_6 = 0,1061 \cdot h$$



Auswertung: 200 Harmonische, $h = 1$; $T = 1s$



Aufgabe 2

$$1) a) \lambda = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{5 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} \right] = 0,229 \quad 1$$

$$D = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} = \frac{0,229}{\sqrt{4\pi^2 + 0,229^2}} = 0,036 \quad 1$$

$$b) C = 2 \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I}{l \cdot b^2} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 114 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{4000 \text{ mm} \cdot (1000 \text{ mm})^2}$$

$$C = 359,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 359100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad 1$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{359100 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{200 \text{ kg}}} = 42,37 \frac{1}{\text{s}} \quad 1$$

$$w_d = w_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} = 42,37 \frac{1}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 - 0,036^2} = 42,34 \frac{1}{\text{s}} \quad 1$$

$$c) \delta = D \cdot w_0 = 0,036 \cdot 42,37 \frac{1}{\text{s}} = 1,525 \frac{1}{\text{s}} \quad 1$$

$$C_1 = w_0 = 5 \text{ mm}$$

$$C_2 = \frac{\dot{w}_0 + \delta \cdot w_0}{w_d} = \frac{1,525 \frac{1}{\text{s}} \cdot 5 \text{ mm}}{42,34 \frac{1}{\text{s}}} = 0,18 \text{ mm} \quad 1$$

$$w(t) = e^{-1,525 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \cdot \left[5 \text{ mm} \cdot \cos\left(42,34 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) + 0,18 \text{ mm} \cdot \sin\left(42,34 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \right] \quad 1$$

$$2) \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}} \cdot \frac{m_u \cdot r_u}{m_{\text{ges}}} = \hat{w}$$

$$\eta^2 = \frac{\hat{w} \cdot m_{\text{ges}}}{m_u \cdot r_u} \cdot \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}$$

$$\eta^2 = \frac{5,5 \text{ mm} \cdot 200 \text{ kg}}{400 \text{ kg} \cdot \text{mm}} \cdot \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot 0,036^2 \cdot \eta^2}$$

$$\eta^2 = 2,75 \cdot \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot 0,036^2 \cdot \eta^2}$$

$$\eta^4 = 7,5625 \cdot [(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot 0,036^2 \cdot \eta^2]$$

$$\eta^4 = 7,5625 \cdot (1 - 2\eta^2 + \eta^4) + 0,0392 \cdot \eta^2$$

$$\eta^4 = 7,5625 - 15,125 \cdot \eta^2 + 7,5625 \cdot \eta^4 + 0,0392 \eta^2$$

$$6,5625 \cdot \eta^4 - 15,0858 \cdot \eta^2 + 7,5625 = 0$$

$$\eta^4 - 2,299 \cdot \eta^2 + 1,152 = 0$$

$$\eta_{1/2}^2 = 1,150 \mp \sqrt{1,150^2 - 1,152}$$

$$\eta_1^2 = 1,150 - 0,413 = 0,737 \rightarrow \eta_1 = 0,86$$

4

$$\eta_2^2 = 1,150 + 0,413 = 1,563 \rightarrow \eta_2 = 1,25$$

$$n_1 = \frac{\eta_1 \cdot \omega_0}{2\pi} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = \frac{0,86 \cdot 42,37 \frac{1}{\text{s}}}{2\pi} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = 348 \text{ min}^{-1}$$

1

$$n_2 = \frac{\eta_2 \cdot \omega_0}{2\pi} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = \frac{1,25 \cdot 42,37 \frac{1}{\text{s}}}{2\pi} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} = 506 \text{ min}^{-1}$$

$$3) \quad \Omega = \frac{600 \text{ min}^{-1}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} \cdot 2\pi = 62,83 \frac{1}{\text{s}}$$

1

$$\eta = \frac{62,83 \frac{1}{\text{s}}}{42,37 \frac{1}{\text{s}}} = 1,48$$

1

$$\hat{w} = \frac{1,48^2}{\sqrt{(1 - 1,48^2)^2 + 4 \cdot 0,036^2 \cdot 1,48^2}} \cdot \frac{400 \text{ kg} \cdot \text{mm}}{200 \text{ kg}}$$

$$\hat{w} = 3,66 \text{ mm} \quad 1$$

$$\mu = -\arctan\left(\frac{2 \cdot 0,036 \cdot 1,48}{1 - 1,48^2}\right) = -3,052 \quad 1$$

$$w(t) = 3,66 \text{ mm} \cdot \sin\left(62,83 \frac{1}{s} \cdot t - 3,052\right) \quad 1$$

Aufgabe 3

$$1) \det \begin{pmatrix} 3c - \frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \omega^2 & -c \\ -c & 3c - \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 3000 - 30 \cdot \omega^2 & -1000 \\ -1000 & 3000 - 45 \cdot \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(3000 - 30 \cdot \omega^2) \cdot (3000 - 45 \cdot \omega^2) - 10^6 = 0$$

$$9 \cdot 10^6 - 135000 \cdot \omega^2 - 90000 \cdot \omega^2 + 1350 \omega^4 - 10^6 = 0$$

$$1350 \cdot \omega^4 - 225000 \cdot \omega^2 + 8 \cdot 10^6 = 0$$

$$\omega^4 - 166,6 \cdot \omega^2 + 5925,9 = 0$$

$$\omega_{1/2}^2 = 83,3 \pm \sqrt{(83,3)^2 - 5925,9}$$

$$\omega_1^2 = 83,3 - 31,91 = 51,42 \frac{1}{s^2} \rightarrow \omega_1 = 7,17 \frac{1}{s} \quad (4)$$

$$\omega_2^2 = 83,3 + 31,91 = 115,24 \frac{1}{s^2} \rightarrow \omega_2 = 10,74 \frac{1}{s}$$

1. Eigenvektor

$$\begin{bmatrix} 1457,4 & -1000 \\ -1000 & 686,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

obere Gleichung: $1457,1 \cdot x_{11} - 1000 \cdot x_{12} = 0 \Rightarrow x_{12} = 1,457 \cdot x_{11}$

untere Gleichung: $1000 \cdot x_{11} - 686,1 \cdot x_{12} = 0 \Rightarrow x_{12} = 1,457 \cdot x_{11}$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,457 \end{bmatrix}$$

2. Eigenvektor

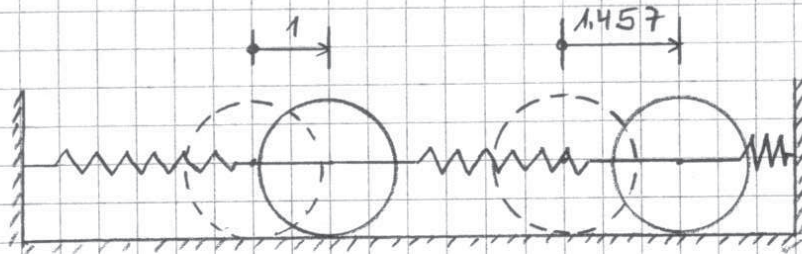
$$\begin{bmatrix} -457,2 & -1000 \\ -1000 & -2185,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

obere Gleichung: $-457,2 \cdot x_{21} - 1000 \cdot x_{22} = 0$; $x_{22} = -0,457 \cdot x_{21}$

untere Gleichung: $-1000 \cdot x_{21} - 2185,8 \cdot x_{22} = 0$; $x_{22} = -0,457 \cdot x_{21}$

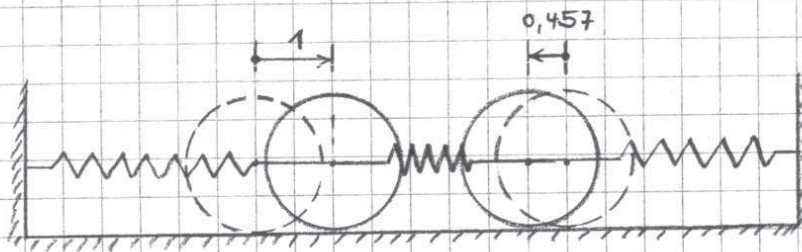
$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,457 \end{bmatrix}$$

2/



1. Eigenvektor

(1)



2. Eigenvektor

(1)

3/ Modalmatrix

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,457 & -0,457 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Spektralmatrix

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51,42 \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 115,24 \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \quad (1)$$