

zu 1/

Lage 0: Ausgangslage

$$E_{K0} = 0; E_{P0} = 0; E_{PF0} = 0$$

Lage 1: $\varphi_1 = 60^\circ$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \omega_2^2$$

$$E_{PF1} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2$$

$$E_{PL1} = -m_K \cdot g \cdot s$$

Energiesatz: $E_1 = E_0$

$$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \omega_2^2 - m_K \cdot g \cdot s + \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \omega_2^2 = m_K \cdot g \cdot s - \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2$$

Kinematik

$$\varphi_2 = \frac{s}{r}; \varphi_1 \cdot r = \varphi_2 \cdot R; \varphi_1 = \varphi_2 \cdot \frac{R}{r} = s \cdot \frac{R}{r^2}$$

$$f = \varphi_1 \cdot R = s \cdot \frac{R^2}{r^2}; s = \varphi_1 \cdot \frac{r^2}{R}$$

in Energiesatz:

$$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_{R1} \cdot R^2 \cdot \frac{R^2}{r^4} \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_{R2} \cdot R^2 \cdot \frac{v_K^2}{r^2}$$

$$= m_K \cdot g \cdot \varphi_1 \cdot \frac{r^2}{R} - \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\varphi_1 \cdot R)^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_K^2 \cdot \left(m_K + \frac{1}{2} \cdot m_{R1} \cdot \frac{R^4}{r^4} + \frac{1}{2} \cdot m_{R2} \cdot \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$= m_K \cdot g \cdot 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{r^2}{R} - \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot R \right)^2$$

$$V_K = \sqrt{\frac{2 \cdot m_K \cdot g \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2}{R} - c \cdot \frac{\pi^2}{9} \cdot R^2}{m_K + \frac{1}{2} \cdot m_{R1} \cdot \frac{R^4}{r^4} + \frac{1}{2} \cdot m_{R2} \cdot \frac{R^2}{r^2}}}$$

$$V_K = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(0,2 \text{ m})^2}{0,4 \text{ m}} - 50 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{\pi^2}{9} \cdot (0,4 \text{ m})^2}{8 \text{ kg} + \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ kg} \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ kg} \cdot 4}}$$

$$V_K = 0,438 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

zu 2) $E_K + E_{PL} + E_{PF} = E_0 = 0$

$$E_K = -E_{PL} - E_{PF} = m_K \cdot g \cdot s - \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2$$

$$E_K = m_K \cdot g \cdot \varphi_1 \cdot \frac{r^2}{R} - \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varphi_1^2 \cdot R^2$$

$$E_K = 8 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{(0,2 \text{ m})^2}{0,4 \text{ m}} \cdot \varphi_1 - \frac{1}{2} \cdot 50 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,4 \text{ m})^2 \cdot \varphi_1^2$$

$$E_K = 7,848 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \varphi_1 - 4 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \varphi_1^2$$

$$E'_K = 7,848 \text{ N} \cdot \text{m} - 8 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \varphi_1 = 0$$

$$\varphi_1 = 0,981 = 0,981 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 56,21^\circ$$

$$E_{K\max} = 7,848 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot 0,981 - 4 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot (0,981 \text{ m})^2$$

$$E_{K\max} = 3,849 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Lage 2: Kugel am Umkehrpunkt

1/3

$$E_{K2} = 0; \quad E_{PL2} = -m_K \cdot g \cdot s_{\max}; \quad E_{PF2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot f_{\max}^2$$

Energiesatz: $E_2 = E_0 = 0$

$$-m_K \cdot g \cdot s_{\max} + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(s_{\max} \cdot \frac{R}{r^2} \right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot s_{\max}^2 \cdot 16 = m_K \cdot g \cdot s_{\max}$$

$$8 \cdot c \cdot s_{\max}^2 = m_K \cdot g \cdot s_{\max}$$

$$s_{\max} = \frac{m_K \cdot g}{8 \cdot c}$$

$$s_{\max} = \frac{8 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8 \cdot 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,1962 \text{ m}$$

$$\varphi_{\max} = s_{\max} \cdot \frac{R}{r^2} = 0,1962 \text{ m} \cdot \frac{0,4 \text{ m}}{(0,2 \text{ m})^2}$$

$$\varphi_{\max} = 1,962 = 1,962 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 112,41^\circ$$

zu 1) $y(t)$ ist eine ungerade Funktion

$$a_0 = a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4 \cdot h}{T} \cdot t - h \right) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \frac{4}{T} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} 0 \cdot dt$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} t \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt - \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \left[\frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{t \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{k \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{4}} + \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}}$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \left[\frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k^2 \cdot \omega^2} - \frac{\frac{T}{4} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k \cdot \omega} \right] + \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \left[\cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - 1 \right]$$

$$b_k = \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}} - \frac{16 \cdot h}{T^2} \cdot \frac{T^2 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k \cdot 8 \cdot \frac{\pi}{2}} + \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{2}\right) - \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}}$$

$$b_k = \frac{4 \cdot h}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2 \cdot h}{k \cdot \pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2 \cdot h}{k \cdot \pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2 \cdot h}{k \cdot \pi}$$

$$b_k = \frac{4 \cdot h}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2 \cdot h}{k \cdot \pi}$$

$$b_1 = \frac{4 \cdot h}{\pi^2} \cdot 1 - \frac{2 \cdot h}{\pi} = -0,2313 \cdot h$$

$$b_2 = 0 - \frac{2 \cdot h}{2 \cdot \pi} = -0,3183 \cdot h$$

$$b_3 = \frac{4 \cdot h}{9 \cdot \pi^2} \cdot (-1) - \frac{2 \cdot h}{3 \cdot \pi} = -0,2572 \cdot h$$

$$b_4 = 0 - \frac{2 \cdot h}{4 \cdot \pi} = -0,1592 \cdot h$$

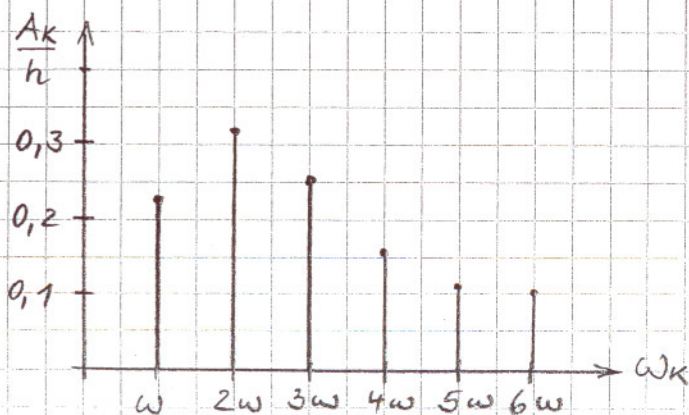
$$b_5 = \frac{4 \cdot h}{25 \pi^2} \cdot 1 - \frac{2 \cdot h}{5 \cdot \pi} = -0,1111 \cdot h$$

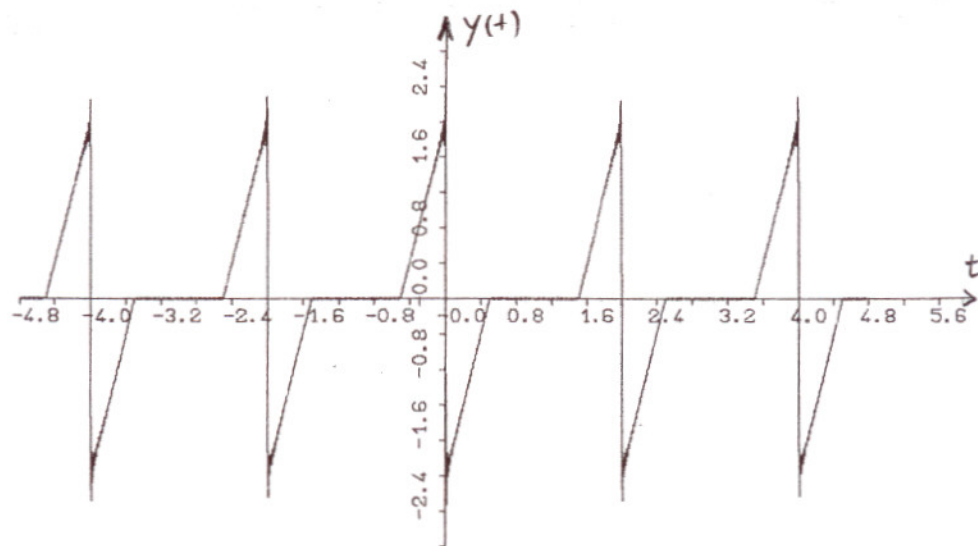
$$b_6 = 0 - \frac{2 \cdot h}{6 \cdot \pi} = -0,1061 \cdot h$$

$$y(t) = -h \cdot \left[0,2313 \cdot \sin(\omega \cdot t) + 0,3183 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) + 0,2572 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + 0,1592 \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t) + \dots \right]$$

zu 2) Amplitudenspektrum

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{b_k^2} = |b_k|$$





Auswertung der Fourierreihe: $T = 2\text{ s}$; $h = 2\text{ mm}$
100 Harmonische

$$\text{zu 1)} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^5 \frac{N}{m}}{400 \text{ kg}}} = 44,72 \frac{1}{s}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{60 \text{ s}^{-1}}{44,72 \text{ s}^{-1}} = 1,34$$

$$D = \frac{d}{2 \cdot m \cdot \omega_0} = \frac{2000 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 400 \text{ kg} \cdot 44,72 \text{ s}^{-1}} = 0,056$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}}$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-1,34^2)^2 + 4 \cdot 0,056^2 \cdot 1,34^2}} = 1,235$$

$$\hat{x} = V_1 \cdot \frac{F}{c} = 1,235 \cdot \frac{4000 \text{ N}}{8 \cdot 10^5 \frac{N}{m}} = 0,006175 \text{ m}$$

$$\hat{x} = 6,175 \text{ mm}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{2 \cdot D \cdot \eta}{1-\eta^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2 \cdot 0,056 \cdot 1,34}{1-1,34^2}\right)$$

$$\varphi = -2,955$$

$$x(t) = 6,175 \text{ mm} \cdot \sin\left(60 \frac{1}{s} \cdot t - 2,955\right)$$

$$\text{zu 2)} \quad V_D = V_3 = \sqrt{\frac{1 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot D^2 \cdot \eta^2}}$$

$$V_D = \sqrt{\frac{1 + 4 \cdot 0,056^2 \cdot 1,34^2}{(1 - 1,34^2)^2 + 4 \cdot 0,056^2 \cdot 1,34^2}}$$

$$V_D = 1,249$$

$$V_D = \frac{\frac{1}{f_B}}{\frac{1}{f}} = 1,249 \Rightarrow \frac{1}{f_B} = 1,249 \cdot 4 \text{ kN} = 5 \text{ kN}$$

$$\text{zu 3) } x(t=20\text{s}) = 6,175 \text{ mm} \cdot \sin\left(60 \frac{1}{\text{s}} \cdot 20\text{s} - 2,955\right)$$

$$x(t=20\text{s}) = -0,605 \text{ mm}$$

$$\dot{x}(t=20\text{s}) = 6,175 \text{ mm} \cdot 60 \frac{1}{\text{s}} \cdot \cos\left(60 \frac{1}{\text{s}} \cdot 20\text{s} - 2,955\right)$$

$$\dot{x}(t=20\text{s}) = -368,72 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$\delta = D \cdot \omega_0 = 0,056 \cdot 44,72 \frac{1}{\text{s}} = 2,504 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} = 44,72 \frac{1}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 - 0,056^2} = 44,65 \frac{1}{\text{s}}$$

$$C_1 = x_0 = x(t=20\text{s}) = -0,605 \text{ mm}$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 + D \cdot x_0}{\omega_d} = \frac{-368,72 \frac{\text{mm}}{\text{s}} + 2,504 \frac{1}{\text{s}} \cdot (-0,605 \text{ mm})}{44,65 \frac{1}{\text{s}}}$$

$$C_2 = -8,292 \text{ mm}$$

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot \left[C_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right]$$

$$x(t) = e^{-2,504 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \cdot \left[-0,605 \text{ mm} \cdot \cos\left(44,65 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) - 8,292 \text{ mm} \cdot \sin\left(44,65 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \right]$$

für $t \geq 20\text{s}$