

zu 1)

1/1

Lage 1: Ausgangslage

$$E_{pL1} = E_{pF1} = E_{K1} = 0$$

Lage 2: Zylinder hat Wegstrecke x_2 zurückgelegt

$$E_{pL2} = -m_2 \cdot g \cdot x_2$$

$$E_{pF2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \dot{\varphi}_2^2$$

Energiesatz: $E_2 = E_1$

$$\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2 - m_2 \cdot g \cdot x_2 = 0 \quad (1)$$

Kinematik

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{v_2}{R} \quad (2)$$

$$\dot{\varphi}_2 \cdot r = \dot{\varphi}_1 \cdot R \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \cdot \frac{r}{R} = \frac{v_2}{R} \cdot \frac{r}{R} = v_2 \cdot \frac{r}{R^2} \quad (3)$$

$$f = \varphi_1 \cdot r = x_2 \cdot \frac{r^2}{R^2} \quad (4)$$

(2), (3) und (4) in (1)

$$\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{S1} \cdot v_2^2 \cdot \frac{r^2}{R^4} + \frac{1}{2} \cdot J_{S2} \cdot \frac{v_2^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot c \cdot x_2^2 \cdot \frac{r^4}{R^4} - m_2 \cdot g \cdot x_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \cdot v_2^2 \cdot \frac{r^2}{R^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2 \cdot \frac{v_2^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot c \cdot x_2^2 \cdot \frac{r^4}{R^4} - m_2 \cdot g \cdot x_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{4} \cdot m_1 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot v_2^2 + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{r^4}{R^4} \cdot x_2^2 - m_2 \cdot g \cdot x_2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot m_z + \frac{1}{4} \cdot m_1 \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \cdot m_2 \right) \cdot V_z^2 = m_z \cdot g \cdot x_z - \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{r^4}{R^4} \cdot x_z^2$$

$$21,25 \text{ kg} \cdot V_z^2 = 294,3 \text{ N} \cdot x_z - \frac{1}{32} \cdot c \cdot x_z^2 \quad (5)$$

$$c = \frac{32 \cdot (294,3 \text{ N} \cdot x_z - 21,25 \text{ kg} \cdot V_z^2)}{x_z^2}$$

$$\text{mit } V_z (x_z = 2 \text{ m}) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = \frac{32 \cdot (588,6 \text{ N} \cdot \text{m} - 340 \text{ N} \cdot \text{m})}{(2 \text{ m})^2} = 1988,8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

zu 2) a) mit Gl. (5)

$$21,25 \text{ kg} \cdot V_z^2 = 294,3 \text{ N} \cdot x_z - 62,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x_z^2$$

$$V_z = \sqrt{13,849 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x_z - 2,941 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot x_z^2}$$

b) Lage 3: Zylinder am unteren Umkehrpunkt

$$E_{pL3} = -m_z \cdot g \cdot x_{z\max} = -294,3 \text{ N} \cdot x_{z\max}$$

$$E_{pF3} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot f_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x_{z\max}^2 \cdot \frac{r^4}{R^4}$$

$$E_{pF3} = \frac{1}{2} \cdot 2000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{16} \cdot x_{z\max}^2 = 62,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x_{z\max}^2$$

$$E_3 = E_1 :$$

$$x_{z\max} \cdot (62,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x_{z\max} - 294,3 \text{ N}) = 0$$

$$x_{z\max 1} = 0$$

$$x_{z\max 2} = \frac{294,3 \text{ N}}{62,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 4,71 \text{ m}$$

c)

$$\dot{V}_z = \frac{13,849 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5,882 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot x_z}{\sqrt{13,849 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x_z - 2,941 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot x_z^2}} = 0$$

$$x_z = \frac{13,849 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5,882 \frac{1}{\text{s}^2}} = 2,35 \text{ m}$$

$$V_{z\text{max}} = \sqrt{13,849 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,35 \text{ m} - 2,941 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot (2,35 \text{ m})^2}$$

$$V_{z\text{max}} = 4,038 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\omega_{z\text{max}} = \frac{V_{z\text{max}}}{R} = \frac{4,038 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,3 \text{ m}} = 13,46 \frac{1}{\text{s}}$$

$y(t)$ ist ein gerades Signal $y(-t) = y(t) \Rightarrow b_k = 0$

1) Fourierkoeffizient a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{6}} h \cdot dt + \frac{2}{T} \cdot \int_{\frac{T}{3}}^{\frac{T}{2}} (-h) \cdot dt$$

$$a_0 = \frac{2 \cdot h}{T} \cdot \frac{T}{6} - \frac{2 \cdot h}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{3} \right) = 0$$

Fourierkoeffizienten a_k

$$a_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$a_k = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{6}} h \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \frac{4}{T} \cdot \int_{\frac{T}{3}}^{\frac{T}{2}} (-h) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$$

$$a_k = \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \Big|_0^{\frac{T}{6}} - \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \Big|_{\frac{T}{3}}^{\frac{T}{2}}$$

$$a_k = \frac{4 \cdot h}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left[\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{6}\right) - \cancel{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right)} + \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{3}\right) \right]$$

$$a_k = \frac{2 \cdot h}{k \cdot \pi} \cdot \left[\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right) \right]$$

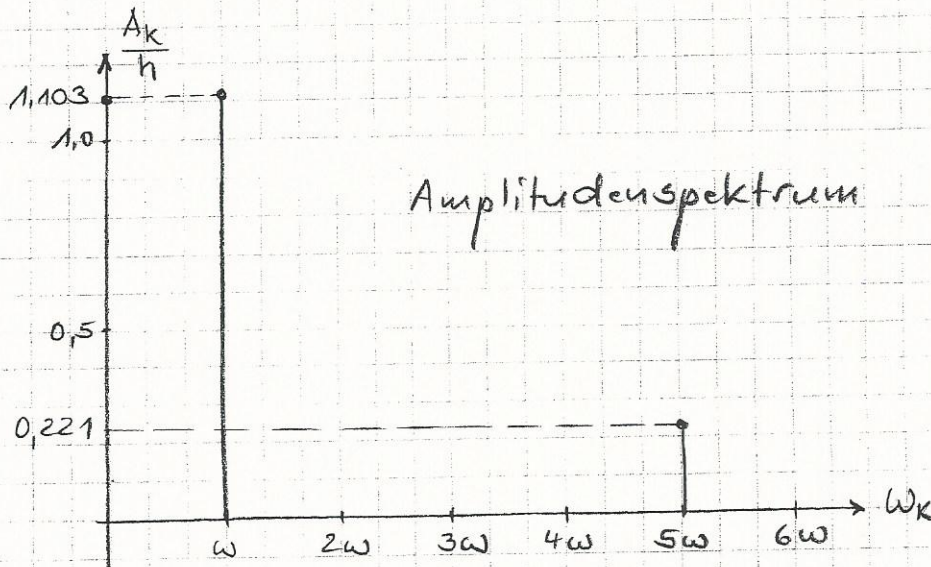
	1	2	3	4	5	6
$\sin\left(\frac{k \cdot \pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$a_k \cdot \frac{\pi}{h}$	$2 \cdot \sqrt{3}$	0	0	0	$-\frac{2}{5} \cdot \sqrt{3}$	0

$$2) \quad y(t) = \frac{2 \cdot h}{\pi} \cdot \left[\sqrt{3} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \cos(5 \cdot \omega \cdot t) \right]$$

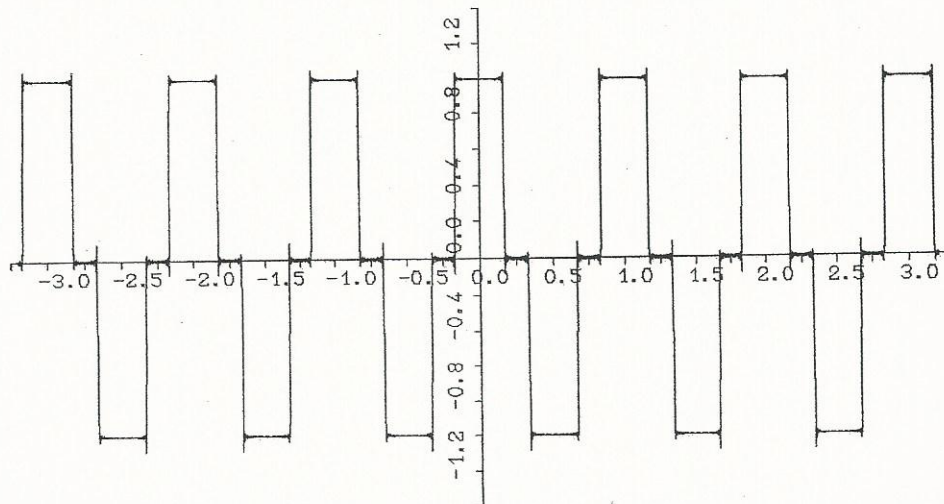
$$3) \quad A_k = |Q_k|$$

$$A_1 = \frac{2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{\pi} = 1,103 \cdot h$$

$$A_5 = \frac{2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \pi} = 0,221 \cdot h$$



Auswertung: $h = 1,0$; $T = 1s$; 200 Harmonische



$$1) m_{\text{ersatz}} = m + \frac{17}{35} \cdot m_B$$

$$m_{\text{ersatz}} = 150 \text{ kg} + \frac{17}{35} \cdot 42,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 6 \text{ m} = 274,15 \text{ kg}$$

$$c = \frac{3 \cdot E \cdot I_y \cdot l}{\frac{l^2}{4} \cdot \frac{l^2}{4}} = \frac{48 \cdot E \cdot I_y}{l^3}$$

$$c = \frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2490 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(6000 \text{ mm})^3}$$

$$c = 1162 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 1162 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1162 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{274,15 \text{ kg}}} = 65,10 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\textcircled{D} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 1}} = \frac{0,2515}{\sqrt{4\pi^2 + 0,2515^2}} = 0,04$$

$$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \textcircled{D}^2} = 65,10 \frac{1}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 - 0,04^2}$$

$$\omega_d = 65,05 \frac{1}{\text{s}}$$

$$2) \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{80 \text{ s}^{-1}}{65,15 \text{ s}^{-1}} = 1,23$$

$$\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1,23^2)^2 + 4 \cdot 0,04^2 \cdot 1,23^2}} \cdot \frac{5000 \text{ N}}{1162 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$

$$\hat{w} = 8,24 \text{ mm}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{2 \cdot 0,04 \cdot 1,23}{1 - 1,23^2}\right) = -2,952$$

$$w(t) = 8,24 \text{ mm} \cdot \sin\left(80 \frac{1}{s} \cdot t - 2,952\right) \quad (1)$$

$$3) \quad F = 8,24 \text{ mm} \cdot 1162 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 9575 \text{ N}$$

$$M_b = \frac{9575 \text{ N} \cdot 6 \text{ m}}{4} = 14363 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{14363 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{311 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 46,18 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$4) \quad w(t=120\text{s}) = 8,24 \text{ mm} \cdot \sin\left(80 \frac{1}{s} \cdot 120\text{s} - 2,952\right)$$

$$w(t=120\text{s}) = 4,077 \text{ mm}$$

$$\dot{w}(t=120\text{s}) = 8,24 \text{ mm} \cdot 80 \frac{1}{s} \cdot \cos\left(80 \frac{1}{s} \cdot 120\text{s} - 2,952\right)$$

$$\dot{w}(t=120\text{s}) = -572,86 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad (1)$$

$$\delta = 0,04 \cdot 65,10 \frac{1}{s} = 2,604 \quad (1)$$

$$C_1 = 4,077 \text{ mm}$$

$$C_2 = \frac{-572,86 \frac{\text{mm}}{\text{s}} + 2,604 \frac{1}{s} \cdot 4,077 \text{ mm}}{65,05 \frac{1}{s}} = -8,643 \text{ mm} \quad (1)$$

$$w(t) = e^{-2,604 \frac{1}{s} \cdot t} \cdot \left[4,077 \text{ mm} \cdot \cos\left(65,05 \frac{1}{s} \cdot t\right) - 8,643 \text{ mm} \cdot \sin\left(65,05 \frac{1}{s} \cdot t\right) \right] \quad (1)$$

für $t \geq 120\text{s}$