

zu 1)

1/1

Kinematik

$$\dot{\varphi}_W = \frac{\dot{x}_W}{r} ; \dot{\varphi}_R = \frac{\dot{x}_W}{R} ; \dot{x}_{KL} = \dot{x}_W \cdot \frac{r}{R} ; f = x_{KL} = x_W \cdot \frac{r}{R}$$

Ausgangslage: $E_0 = 0$

Lage 1: Walze besitzt Geschwindigkeit $\dot{x}_W$

$$E_{PL1} = m_{KL} \cdot g \cdot x_{KL} \cdot \sin \beta - m_W \cdot g \cdot x_W \cdot \sin \alpha$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} \cdot m_W \cdot \dot{x}_W^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{SW} \cdot \dot{\varphi}_W^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{SR} \cdot \dot{\varphi}_R^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{KL} \cdot \dot{x}_{KL}^2$$

$$E_{PF1} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2$$

Energieverluste: $E_a = \mu \cdot m_{KL} \cdot g \cdot x_{KL} \cdot \cos \beta$

Energiesatz: $E_1 = E_0 - E_a$

$$\begin{aligned} & m_{KL} \cdot g \cdot x_{KL} \cdot \sin \beta - m_W \cdot g \cdot x_W \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m_W \cdot \dot{x}_W^2 \\ & + \frac{1}{2} \cdot J_{SW} \cdot \dot{\varphi}_W^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{SR} \cdot \dot{\varphi}_R^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{KL} \cdot \dot{x}_{KL}^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2 \\ & = - \mu \cdot m_{KL} \cdot g \cdot x_{KL} \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & m_{KL} \cdot g \cdot x_W \cdot \frac{r}{R} \cdot \sin \beta - m_W \cdot g \cdot x_W \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m_W \cdot \dot{x}_W^2 \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_W \cdot r^2 \cdot \frac{\dot{x}_W^2}{r^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_R \cdot R^2 \cdot \frac{\dot{x}_W^2}{R^2} \\ & + \frac{1}{2} \cdot m_{KL} \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \dot{x}_W^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot x_W^2 \\ & = - \mu \cdot m_{KL} \cdot g \cdot \frac{r}{R} \cdot x_W \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot m_W + \frac{1}{4} \cdot m_R + \frac{1}{2} \cdot m_{KL} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot \dot{x}_W^2$$

1/2

$$= \left(m_W \cdot \sin \alpha - m_{KL} \cdot \frac{r}{R} \cdot \sin \beta - \mu \cdot m_{KL} \cdot \frac{r}{R} \cdot \cos \beta \right) \cdot g \cdot x_W - \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot x_W^2$$

$$91,25 \text{ kg} \cdot \dot{x}_W^2 = 360,53 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x_W - 125 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \cdot x_W^2$$

$$\dot{x}_W = \sqrt{3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x_W - 1,37 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot x_W^2}$$

zu 2) Am Umkehrpunkt ist $\dot{x}_W = 0$

$$3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x_W - 1,37 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot x_W^2 = 0$$

$$x_W = \frac{3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1,37 \frac{1}{\text{s}^2}} = 2,88 \text{ m}$$

zu 3) Wenn $\dot{x}_W$ maximal, ist $\frac{d\dot{x}_W}{dx_W} = 0$

$$\frac{3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2 \cdot 1,37 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot x_W}{\sqrt{3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x_W - 1,37 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot x_W^2}} = 0$$

Zähler muss Null werden:

$$x_W = \frac{3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 1,37 \frac{1}{\text{s}^2}} = 1,44 \text{ m}$$

$$\dot{x}_{W\text{max}} = \sqrt{3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,44 \text{ m} - 1,37 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1,44 \text{ m})^2}$$

$$\dot{x}_{W\text{max}} = 1,687 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{\varphi}_{R\text{max}} = \frac{\dot{x}_{W\text{max}}}{R} = \frac{1,687 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,2 \text{ m}} = 8,435 \frac{1}{\text{s}}$$

zu 4) $x_w = 2\pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \text{ m}$

113

$$\dot{x}_w = \sqrt{3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \text{ m} - 1,37 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0,04 \text{ m}^2}$$

$$\dot{x}_w = 1,673 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{x}_{kl} = \frac{r}{R} \cdot \dot{x}_w = \frac{1}{2} \cdot 1,673 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,836 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

zu 1)

2/1

$$C = \frac{48 \cdot E \cdot I_y}{L^3} = \frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2 \cdot 171 \cdot 10^4 \text{mm}^4}{(4000 \text{mm})^3}$$

$$C = 538,65 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 538650 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{538650 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{300 \text{kg}}} = 42,37 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0,1485 \text{s}} = 42,31 \frac{1}{\text{s}}$$

$$D = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_d}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{42,31 \text{s}^{-1}}{42,37 \text{s}^{-1}}\right)^2} = 0,053$$

$$\delta = D \cdot \omega_0 = 0,053 \cdot 42,37 \frac{1}{\text{s}} = 2,246 \frac{1}{\text{s}}$$

$$w(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot [C_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)]$$

$$C_1 = w_0 = 1 \text{cm} = 10 \text{mm}$$

$$C_2 = \frac{\dot{w}_0 + \delta \cdot w_0}{\omega_d} = \frac{2,246 \frac{1}{\text{s}} \cdot 10 \text{mm}}{42,31 \frac{1}{\text{s}}} = 0,531 \text{mm}$$

$$w(t) = e^{-2,246 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \cdot \left[10 \text{mm} \cdot \cos\left(42,31 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) + 0,531 \text{mm} \cdot \sin\left(42,31 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \right]$$

$$\text{zu 2)} \quad \Omega = \frac{2\pi \cdot 360 \text{min}^{-1}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 37,7 \frac{1}{\text{s}}$$

$$F(t) = 700 \text{N} \cdot \sin\left(37,7 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) + 500 \text{N} \cdot \sin\left(2 \cdot 37,7 \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \pi\right)$$

$$F(t) = 700 \text{ N} \cdot \sin\left(37,7 \frac{1}{s} \cdot t\right) - 500 \text{ N} \cdot \sin\left(75,4 \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

$$\eta_1 = \frac{37,7 \text{ s}^{-1}}{42,37 \text{ s}^{-1}} = 0,89$$

$$\hat{W}_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-0,89^2)^2 + 4 \cdot 0,053^2 \cdot 0,89^2}} \cdot \frac{700 \text{ N}}{538,65 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$

$$\hat{W}_1 = 5,69 \text{ mm}$$

$$\varphi_1 = -\arctan\left(\frac{2 \cdot 0,053 \cdot 0,89}{1-0,89^2}\right) = -0,426$$

$$\eta_2 = \frac{75,4 \text{ s}^{-1}}{42,37 \text{ s}^{-1}} = 1,78$$

$$\hat{W}_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-1,78^2)^2 + 4 \cdot 0,053^2 \cdot 1,78^2}} \cdot \frac{500 \text{ N}}{538,65 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$

$$\hat{W}_2 = 0,426 \text{ mm}$$

$$\varphi_2 = -\arctan\left(\frac{2 \cdot 0,053 \cdot 1,78}{1-1,78^2}\right) = -3,055$$

$$W(t) = 5,69 \text{ mm} \cdot \sin\left(37,7 \frac{1}{s} \cdot t - 0,426\right) - 0,426 \text{ mm} \cdot \sin\left(75,4 \frac{1}{s} \cdot t - 3,055\right)$$

Aufgabe 3

$$1) \quad c = \frac{3 \cdot E \cdot I_y \cdot l}{\frac{l^2}{4} \cdot \frac{l^2}{4}} = \frac{48 \cdot E \cdot I_y}{l^3}$$

$$c = \frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 137 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(4000 \text{ mm})^3}$$

$$c = 215,775 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 215775 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\text{Mersatz} = \frac{17}{35} \cdot 11,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} = 22,54 \text{ kg}$$

$$2) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{215775 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{22,54 \text{ kg}}} = 97,84 \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{97,84 \text{ s}^{-1}} = 0,064 \text{ s} < 0,1 \text{ s}$$

$$3) \quad \delta = D \cdot \omega_0 = 0,04 \cdot 97,84 \frac{1}{\text{s}} = 3,91 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} = 97,84 \frac{1}{\text{s}} \cdot \sqrt{1 - 0,04^2} = 97,76 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} = \frac{0,04}{\sqrt{1 - 0,04^2}} = 0,04$$

$$\frac{F_0}{c} = \frac{3000 \text{ N}}{215775 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0,01390 \text{ m} = 13,90 \text{ mm}$$

$$W(t) = \frac{F_0}{c} \left[1 - e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_d \cdot t) + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right) \right]$$

$$W(t) = 13,9 \text{ mm} \cdot \left[1 - e^{-3,91 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \cdot \left(\cos\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) + 0,04 \cdot \sin\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \right) \right]$$

$$4) \dot{w}(t) = 13,9 \text{ mm} \cdot 3,91 \frac{1}{\text{s}} \cdot e^{-3,91 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \cdot \left[\cos\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) + 0,04 \cdot \sin\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \right] - 13,9 \text{ mm} \cdot e^{-3,91 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \cdot 97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot \left[-\sin\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) + 0,04 \cdot \cos\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right) \right]$$

$$w(t=0,1\text{s}) = 22,86 \text{ mm}$$

$$\dot{w}(t=0,1\text{s}) = -35,02 \frac{\text{mm}}{\text{s}} - 281,70 \frac{\text{mm}}{\text{s}} = -316,72 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$C_1 = 22,86 \text{ mm}$$

$$C_2 = \frac{-316,72 \frac{\text{mm}}{\text{s}} + 3,91 \frac{1}{\text{s}} \cdot 22,86 \text{ mm}}{97,76 \frac{1}{\text{s}}} = -2,33 \text{ mm}$$

$$w(t^*) = e^{-3,91 \frac{1}{\text{s}} \cdot t} \cdot \left[22,86 \text{ mm} \cdot \cos\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t^*\right) - 2,33 \text{ mm} \cdot \sin\left(97,76 \frac{1}{\text{s}} \cdot t^*\right) \right]$$

$$t^* = t - t_s$$