

zu 1/

Ausgangslage: $E_{p0} = 0$; $E_{k0} = 0$; $E_{pf0} = 0$

Klotz hat Weg s_k zurück gelegt:

$$E_{pL1} = -m_k \cdot g \cdot s_k \cdot \sin \alpha$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot \dot{s}_k^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{s1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{s2} \cdot \dot{\varphi}_2^2$$

$$E_{pf1} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2$$

$$E_a = \mu \cdot m_k \cdot g \cdot s_k \cdot \cos \alpha$$

Kinematik:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{s}_k}{R}; \quad \dot{\varphi}_2 \cdot r = \dot{\varphi}_1 \cdot R$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \cdot \frac{r}{R} = \dot{s}_k \cdot \frac{r}{R^2}$$

$$f = \varphi_1 \cdot R = s_k \cdot \frac{r}{R}$$

Energiesatz: $E_1 = E_0 - E_a$

$$-m_k \cdot g \cdot s_k \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot \dot{s}_k^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{s1} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{s2} \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2 = -\mu \cdot m_k \cdot g \cdot s_k \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_k \cdot \dot{s}_k^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_{R1} \cdot R^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_{R2} \cdot R^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot f^2 = m_k \cdot g \cdot s_k \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m_k \cdot g \cdot s_k \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot \dot{S}_K^2 + \frac{1}{4} \cdot m_{R1} \cdot R^2 \cdot \dot{S}_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^4} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2} \cdot R^2 \cdot \frac{\dot{S}_K^2}{R^2} =$$

$$m_K \cdot g \cdot S_K \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) - \frac{1}{2} \cdot c \cdot S_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_K \cdot \dot{S}_K^2 + \frac{1}{4} \cdot m_{R1} \cdot \dot{S}_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2} \cdot \dot{S}_K^2$$

$$= m_K \cdot g \cdot S_K \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) - \frac{1}{2} \cdot c \cdot S_K^2 \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

$$\dot{S}_K^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_K + \frac{1}{16} \cdot m_{R1} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2} \right)$$

$$= m_K \cdot g \cdot S_K \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) - \frac{1}{8} \cdot c \cdot S_K^2$$

$$\dot{S}_K = \sqrt{\frac{m_K \cdot g \cdot S_K \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) - \frac{1}{8} \cdot c \cdot S_K^2}{\frac{1}{2} \cdot m_K + \frac{1}{16} \cdot m_{R1} + \frac{1}{4} \cdot m_{R2}}}$$

$$\dot{S}_K = \sqrt{\frac{50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot S_K \cdot (0,5 - 0,2 \cdot \cos 30^\circ) - 62,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot S_K^2}{25 \text{ kg} + 1,25 \text{ kg} + 7,5 \text{ kg}}}$$

$$\dot{S}_K = \sqrt{\frac{160,29 \text{ N} \cdot S_K - 62,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot S_K^2}{33,75 \text{ kg}}}$$

$$\dot{S}_K = \sqrt{4,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot S_K - 1,85 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot S_K^2}$$

$$\text{Mit } S_K = 1 \text{ m}$$

$$\dot{S}_K = \sqrt{4,75 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 1,85 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 1,70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

zu 2) Maximale Geschwindigkeit

$$\frac{d\dot{s}_k}{ds_k} = 0 \Rightarrow 4,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2 \cdot 1,85 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot s_k = 0$$

$$s_k = \frac{4,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 1,85 \frac{1}{\text{s}^2}}$$

$$s_k = 1,28 \text{ m}$$

$$\max \dot{s}_k = \sqrt{4,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,28 \text{ m} - 1,85 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot (1,28 \text{ m})^2}$$

$$\max \dot{s}_k = 1,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{zu 3) } \max F_k = c \cdot f_{\max} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot s_{k\max}$$

$$\max F_k = \frac{1}{2} \cdot 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 2 \cdot 1,28 \text{ m} = 640 \text{ N}$$

zu 1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} = \sqrt{\frac{120000 \frac{N}{m}}{30 kg}} = 63,25 \frac{1}{s}$

zu 2)

a) $m \geq 2 \cdot f_N \cdot T$

$f_N = \frac{1}{0,12s} = 16,6 \frac{1}{s}$

$m \geq 2 \cdot 16,6 \frac{1}{s} \cdot 0,12s = 4$

4 Stützstellen sind erforderlich

b) $b_k = \frac{2}{m} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} u(t_i) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot k \cdot i \cdot \pi}{m}\right)$

i	t_i [s]	$u(t_i)$ [mm]	$\sin\left(\frac{2 \cdot i \cdot \pi}{m}\right)$	$\sin\left(\frac{4 \cdot i \cdot \pi}{m}\right)$	$u(t_i) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot i \cdot \pi}{m}\right)$ [mm]	$u(t_i) \cdot \sin\left(\frac{4 \cdot i \cdot \pi}{m}\right)$ [mm]
0	0	0	0	0	0	0
1	0,024	0,26075	0,9511	0,5878	0,2480	0,1533
2	0,048	0,00343	0,5878	-0,9511	0,0020	-0,0033
3	0,072	-0,00343	-0,5878	0,9511	0,0020	-0,0033
4	0,096	-0,26075	-0,9511	-0,5878	0,2480	0,1533
					0,5000	0,3000

$b_1 = \frac{2}{5} \cdot 0,500 = 0,200$

$b_2 = \frac{2}{5} \cdot 0,300 = 0,120$

$$c) \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,12s} = 52,36 s^{-1}$$

$$u(t) = 0,2 \text{ mm} \cdot \sin\left(52,36 \frac{1}{s} \cdot t\right) + 0,12 \text{ mm} \cdot \sin\left(104,72 \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

zu 3)

a) 1. Harmonische

$$\eta_1 = \frac{52,36 \frac{1}{s}}{63,25 \frac{1}{s}} = 0,828$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 0,828^2} \cdot 0,2 \text{ mm}}{\sqrt{(1 - 0,828^2)^2 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 0,828^2}} = \frac{0,2007}{0,325}$$

$$\hat{x}_1 = 0,617 \text{ mm}$$

$$\varphi_1 = -\arctan\left(\frac{2 \cdot 0,05 \cdot 0,828^3}{1 - 0,828^2 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 0,828^2}\right) = -0,1749$$

b) 2. Harmonische

$$\eta_2 = 2 \cdot 0,828 = 1,656$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 1,656^2} \cdot 0,12 \text{ mm}}{\sqrt{(1 - 1,656^2)^2 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 1,656^2}} = \frac{0,1216}{1,7502}$$

$$\hat{x}_2 = 0,0695 \text{ mm}$$

$$\varphi_2 = -\arctan\left(\frac{2 \cdot 0,05 \cdot 1,656^3}{1 - 1,656^2 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 1,656^2}\right)$$

$$\varphi_2 = -\arctan(-0,2648) = -2,883$$

$$x(t) = 0,617 \text{ mm} \cdot \sin\left(52,36 \frac{1}{s} \cdot t - 0,1749\right) \\ + 0,0695 \text{ mm} \cdot \sin\left(104,72 \frac{1}{s} \cdot t - 2,883\right)$$

zu 1)

$$\det(\underline{C} - \omega^2 \cdot \underline{M}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 3000 - 9 \cdot \omega^2 & -1000 \\ -1000 & 1000 - 3 \cdot \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(3000 - 9 \cdot \omega^2) \cdot (1000 - 3 \cdot \omega^2) - 10^6 = 0$$

$$3 \cdot 10^6 - 9000 \cdot \omega^2 - 9000 \cdot \omega^2 + 27 \cdot \omega^4 - 10^6 = 0$$

$$27 \cdot \omega^4 - 18000 \cdot \omega^2 + 2 \cdot 10^6 = 0$$

$$\omega^4 - 666,6 \cdot \omega^2 + 74074,074 = 0$$

$$\xi^2 - 666,6 \cdot \xi + 74074,074 = 0$$

$$\xi_{1/2} = 333,3 \pm \sqrt{(333,3)^2 - 74074,074}$$

$$\xi_1 = 140,88 \frac{1}{s^2}; \omega_1 = 11,87 \frac{1}{s}$$

$$\xi_2 = 525,78 \frac{1}{s^2}; \omega_2 = 22,93 \frac{1}{s}$$

zu 2)

1. Eigenvektor

$$\begin{bmatrix} 1732,08 & -1000 \\ -1000 & 577,36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obere Gleichung: $1732,08 \cdot x_1 - 1000 \cdot \varphi_1 = 0$

$$x_1 = 0,577 \cdot \varphi_1$$

untere Gleichung: $-1000 \cdot x_1 + 577,36 \cdot \varphi_1 = 0$

$$x_1 = 0,577 \cdot \varphi_1$$

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 0,0577 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

2. Eigenvektor

$$\left[\begin{array}{c|c} -1732,02 & -1000 \\ -1000 & -577,34 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obere Gleichung: $-1732,02 \cdot x_2 - 1000 \cdot \varphi_2 = 0$

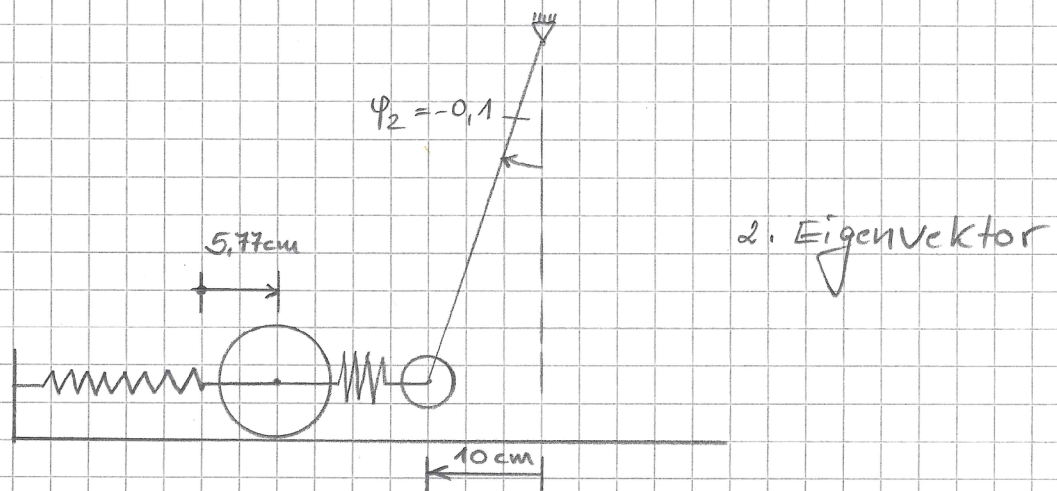
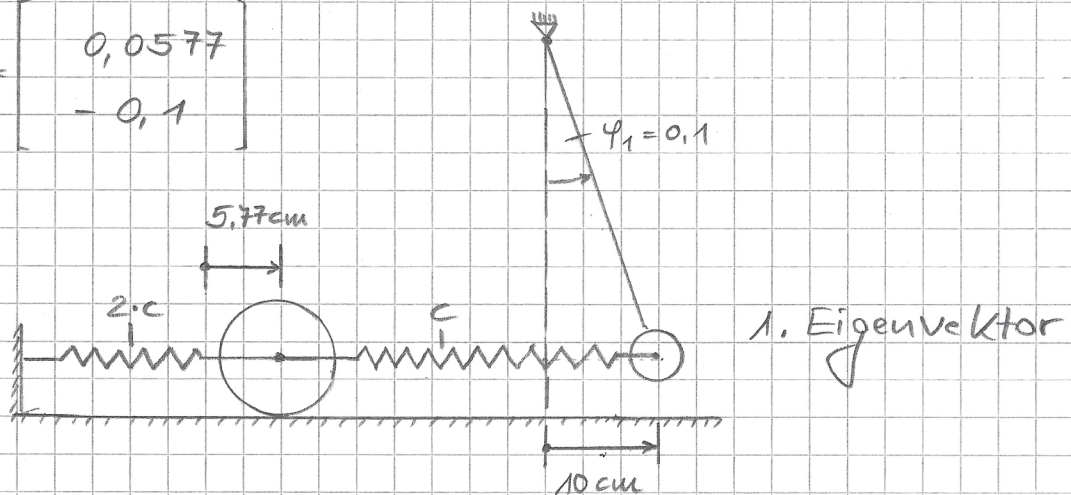
$$x_2 = -0,577 \cdot \varphi_2$$

untere Gleichung: $-1000 \cdot x_2 - 577,34 \cdot \varphi_2 = 0$

$$x_2 = -0,577 \cdot \varphi_2$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 0,0577 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

zu 3)



zu 4)

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0577 & 0,0577 \\ 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140,88 \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 525,78 \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$